

УДК 539.3

Р. П. МОСКАЛЕНКО, Р. Г. ПАЛЬЧИКОВ, О. О. СТРЕЛЬНИКОВА**МЕТОД ГІПЕРСИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ЗАДАЧАХ ВІЛЬНИХ ТА ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ ЛОПАТЕЙ ГІДРОТУРБІН ПРИ ВЗАЄМОДІЇ З РІДИНОЮ**

Проведено аналіз коливань лопатей з урахуванням впливу приєднаних мас рідини. Вважається, що рідина є ідеальною та нестисливою, а її рух, індукований вібраціями лопатей, є безвихровим. В цих умовах швидкість рідини має потенціал, який задовольняє рівнянню Лапласа. Тиск рідини на поверхні лопаті знаходиться з рівняння Бернуллі. Для визначення потенціалу швидкостей сформульовано крайову задачу. Її розв'язок отримано шляхом використання методів теорії потенціалу. Отримано гіперсингулярне граничне інтегральне рівняння, яке розв'язано методом дискретних особливостей.

Ключові слова: гіперсингулярне інтегральне рівняння, гідропружна взаємодія, проєкційний метод, вільні та вимушені коливання.

Р. П. МОСКАЛЕНКО, Р. Г. ПАЛЬЧИКОВ, Е. А. СТРЕЛЬНИКОВА**МЕТОД ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ СВОБОДНЫХ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЛОПАСТЕЙ ГИДРОТУРБИН ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ЖИДКОСТЬЮ**

Дан анализ колебаний лопастей с учетом влияния присоединенных масс жидкости. Предполагается, что жидкость является идеальной, несжимаемой, а ее движение, вызванное колебаниями лопастей, безвихревое. В этих условиях существует потенциал скоростей, удовлетворяющий уравнению Лапласа. Давление жидкости находится из уравнения Бернулли. Для определения потенциала скоростей сформулирована краевая задача. Ее решение осуществляется с использованием методов теории потенциала. Получено разрешающее гиперсингулярное граничное уравнение. Его численное решение осуществлено методом дискретных особенностей.

Ключевые слова: гиперсингулярное интегральное уравнение, гидроупругое взаимодействие, проекционный метод, свободные и вынужденные колебания.

R. P. MOSKALENKO, R. G. PALCHIKOV, E. A. STRELNIKOVA**METHOD OF HYPERSINGULAR INTEGRAL EQUATIONS FOR PROBLEMS OF FREE AND FORCED VIBRATIONS OF TURBINE BLADES INTERACTING WITH LIQUID**

The paper presents an analysis of thin blade vibrations considering effects of liquid added masses. The liquid is supposed to be an ideal and incompressible one. Its flow, induced by blade vibrations, is vortex-free. In these conditions, there is the velocity potential that satisfies the Laplace equation. The liquid pressure as function of the velocity potential is derived from Bernoulli's equation. To determine the velocity potential, the boundary value problem is formulated. It is solved using the potential theory methods. For evaluating the velocity potential and liquid pressure, the hypersingular boundary integral equation is obtained. The coupled discrete singularity and projection methods are applied for its numerical solution. The application of the projection method requires numerical calculation of fourfold integrals. The inner integrals here are singular. So, for their numerical treatment, the method of discrete singularities is used. The effective numerical procedures to estimate the fourfold integrals are elaborated. The free and forced vibrations of model blades are considered.

Key words: hypersingular integral equation, liquid-structure interaction, projection method, free and forced vibrations.

Вступ. Методи сингулярних та гіперсингулярних інтегральних рівнянь широко застосовуються в математичних і прикладних дослідженнях: при розв'язанні крайових задач теорії тріщин, задач дифракції електромагнітних хвиль на провідних екранах, задач циркуляційного і безциркуляційного обтікання тонких профілів і поверхонь. В роботі [1] досліджено коливання кришок гідротурбін при взаємодії з рідиною, в [2, 3] вивчені вільні коливання посудин тиску, в [4] розглянуті великі амплітуди зовнішнього впливу, що призводять до появи хаотичного характеру коливань, в [5] розглянуто випадок дії сейсмічного навантаження; в [6] метод гіперсингулярних рівнянь застосовано до розрахунків власних і вимушених коливань елементів гідротурбінного обладнання при взаємодії з рідиною. Такі дослідження мають значну прикладну цінність, оскільки дають змогу надати рекомендації щодо відстроювання елементів конструкцій від небажаних резонансних частот. Відзначимо, що лопаті в воді є розривом суцільності середовища, що дозволяє звести задачі дослідження гідропружних коливань пластин і оболонок до гіперсингулярних інтегральних рівнянь. В цій роботі запропоновано новий варіант числового розв'язання гіперсингулярних рівнянь в задачах вільних та вимушених коливань пластин, що моделюють лопаті гідротурбіни, при взаємодії з рідиною.

Формулювання задачі і математична модель. Моделюємо лопаті тонкою пластиною, рівняння руху якої має вигляд

$$D\nabla^2\nabla^2 w + \rho_1 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P, \quad (1)$$

де P – тиск рідини на пластину; D – циліндрична жорсткість; h – товщина пластини, ρ_1 – густина матеріалу пластини; w – нормальне переміщення. Циліндричну жорсткість обчислюємо за формулою:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

© Р. П. Москаленко, Р. Г. Пальчиков, О. О. Стрельнікова, 2019

де E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона.

Вважається, що рідина ідеальна та нестислива, а її рух є безвихровим. Рух рідини вивчається в тривимірному формулюванні методами теорії потенціалу. Передбачається, що вільні вихори не утворюються і не сходять з несучої поверхні. В таких умовах існує потенціал швидкостей $\mathbf{v}(x, y, z, t) = \text{grad } \Phi(x, y, z, t)$, що задовольняє всюди поза пластиною рівнянню Лапласа, а на лицьових поверхнях пластини S – умові не-протікання:

$$(\text{grad } \Phi, \mathbf{n}) = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (2)$$

де \mathbf{n} – зовнішня одинична нормаль до поверхні пластини. Для визначення тиску рідини на змочені поверхні застосуємо інтеграл Коші – Лагранжа:

$$P = -\rho_2 \left[\frac{\partial \Phi^+(x, y, z, t)}{\partial t} - \frac{\partial \Phi^-(x, y, z, t)}{\partial t} \right], \quad (3)$$

де ρ_2 – густина рідини.

Таким чином, треба визначити функції $w(x, y, t)$, $\Phi(x, y, z, t)$, що задовольняють рівнянню (1), рівнянню Лапласа, умовам непротікання (2), закріплення пластини й згасання збуреної швидкості рідини на нескінченності. Розглянемо задачу про малі гармонічні коливання пружної лопаті в рідині. Зобразимо шукані функції у вигляді $w(x, y, t) = \exp(i\Omega t)w(x, y)$, $\Phi(x, y, z, t) = \exp(i\Omega t)\Psi(x, y, z)$, де Ω – частота, а w – власна форма коливань пластини в рідині. Зобразимо функцію $\Psi(x, y, z)$ як потенціал подвійного шару з невідомою густиною $\Gamma(\xi)$, $\xi \in S$

$$\Psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma(\xi) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\xi} \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \xi|} \right] dS_\xi. \quad (4)$$

Оскільки $\Psi^+ - \Psi^- = \Gamma$, то перепад тиску є пропорційним щільності потенціалу Γ . Обчислюючи нормальну похідну потенціалу подвійного шару (4) і підставляючи отриманий вираз в граничні умови (2), приходимо до гіперсингулярного граничного інтегрального рівняння

$$\mathbf{N}\Gamma = \frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma(\xi) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_\xi} \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \xi|} \right] dS_\xi = i\Omega w. \quad (5)$$

Згідно з [1], зобразимо невідоме переміщення в вигляді $w = \sum_{k=1}^N c_k w_k$, де w_k є формами коливань елементу конструкції у повітрі. Нехай функції $\Gamma_k(\xi)$ є розв'язками гіперсингулярного рівняння (5) з правими частинами w_k . Позначимо $\Gamma_k(\mathbf{x}) = H(w_k)$, де H – обернений оператор до інтегрального оператора в (5), приходимо до проблеми власних значень:

$$c_j \Omega_j^2 = \Omega^2 \sum_{k=1}^N c_k [\delta_{kj} + (H(w_k) \cdot w_j)]. \quad (6)$$

Тут $P_{kj} = (H(w_k) \cdot w_j)$ є матрицею приєднаних мас рідини.

Одновимірне гіперсингулярне рівняння. Спочатку наведемо порівняння аналітичного та числового розв'язків одновимірного гіперсингулярного рівняння. Як модельну, розглянемо задачу розв'язання одновимірного рівняння

$$\frac{1}{2\pi} \int_L \Gamma(\xi) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_\xi} \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \xi|} dL = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in L \quad (7)$$

з інтегралом в сенсі скінченної частини за Адамаром [7]. Для кола L маємо:

$$\mathbf{x} = (R \cos \varphi_0, R \sin \varphi_0); \quad \xi = (R \cos \varphi, R \sin \varphi); \quad \mathbf{n}_x = (\cos \varphi_0, \sin \varphi_0); \quad \mathbf{n}_\xi = (\cos \varphi, \sin \varphi).$$

Тоді (7) набуває вигляду

$$(\mathbf{A}\Gamma)(\varphi_0) = \frac{1}{4\pi R} \int_{\alpha}^{\beta} \Gamma(\varphi) \frac{d\varphi}{\sin^2(\varphi - \varphi_0)/2} = f(\varphi_0). \quad (8)$$

В [7] доведено, що $\mathbf{A}: \cos k\varphi \mapsto -k \cos k\varphi_0$; $\mathbf{A}: \sin k\varphi \mapsto -k \sin k\varphi_0$; $k = 0, 1, 2, \dots$. На рис. 1, а показано праву частину рівняння (8), визначену за формулою $f(\varphi_0) = 8 \cos(8\varphi_0) + 9 \sin(9\varphi_0)$. Аналітичний (цифра 1) і числовий (цифра 2, сірі крапки) розв'язки подані на рис. 1, б. Аналітичний розв'язок знайдено за формулою $\Gamma(\varphi) = -\cos(8\varphi) - \sin(9\varphi) + 1$. Числовий розв'язок отримано з використанням методу дискретних особливостей (140 точок колокації).

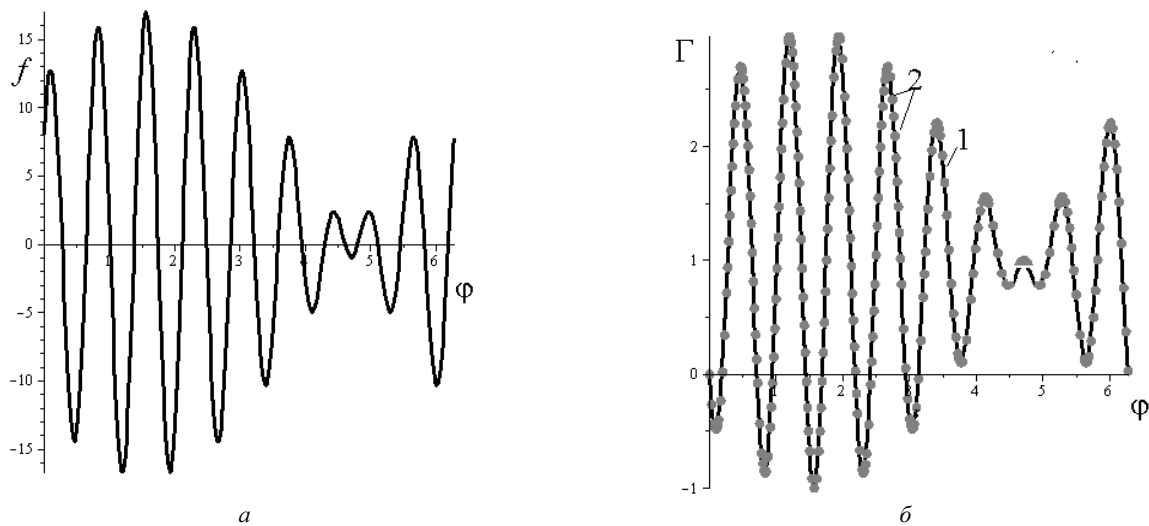


Рис. 1 – Права частина та розв’язки рівняння (8): а – права частина рівняння (8), визначена за формулою $f(\varphi_0) = 8\cos(8\varphi_0) + 9\sin(9\varphi_0)$; б – розв’язки: 1 – аналітичний, 2 – цифровий.

З аналізу поведінки правої частини рівняння (8) та його розв’язку можна висловити припущення, що оператор **A** є подібним до одиничного. Це надало ідею побудови методу розв’язання двовимірного гіперсингулярного рівняння.

Проекційний метод розв’язання двовимірного гіперсингулярного рівняння. Зобразимо розв’язок гіперсингулярного рівняння (6) у вигляді $\Gamma_k = \sum_{l=1}^N d_k w_l$, де w_k є формами коливань пластини в вакуумі. Отримаємо таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь, без врахування множника $i\Omega$:

$$\sum_{i=1}^{N_1} d_i^k a_{ij} = b_j^k, \quad a_{ij} = \iint_S N w_i(x, y) w_j(x, y) dx dy, \quad b_j^k = \iint_S w_k(x, y) w_j(x, y) dx dy. \quad (9)$$

Форми коливань прямокутної пластини мають вигляд

$$w_k(x, y) = w_{lm}(x, y) = \sin \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b}. \quad (10)$$

Елементи матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь (9) є чотирикратними інтегралами, що мають слабкі особливості. Елементи матриці перетворено до вигляду, зручного для чисельної реалізації [8]. Позначимо

$$\Omega_i = \text{grad } \Gamma_i \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{h} = \iint_S \frac{\Omega_i}{r} d\sigma.$$

Розглянемо елемент матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь в (9), маємо

$$a_{ij} = \frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma_j(x_0, y_0) \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}_0} dS = \frac{1}{4\pi} \iint_S (\text{rot}(\Gamma_j \mathbf{h}), \mathbf{n}) dS - \frac{1}{4\pi} \iint_S (\text{grad}(\Gamma_j \times \mathbf{h}), \mathbf{n}) dS. \quad (11)$$

Скористуємося рівностями $\Gamma_i \text{rot } \mathbf{h} = \text{rot}(\Gamma_i \mathbf{h}) - \text{grad } \Gamma_i \times \mathbf{h}$, $\Gamma_i \text{grad } \Phi = \text{rot}(\Gamma_i \mathbf{h}) - \text{grad } \Gamma_i \times \mathbf{h}$.

До першого доданку в правій частині рівності (11) застосуємо *формулу Стокса*. Внаслідок того, що функції $\Gamma_i(x, y)$ дорівнюють нулю на границі області, встановлюємо, що цей доданок дорівнює нулю. Другий доданок перетворимо, використовуючи формулу для подвійного векторного добутку і вираз для \mathbf{h} . Після перетворень отримаємо

$$a_{ij} = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_0} \iint_S \frac{(\text{grad } \Gamma_i, \text{grad } \Gamma_j)}{r} dS dS_0, \quad \Gamma_i = \Gamma_i(x, y); \quad \Gamma_j = \Gamma_j(x_0, y_0).$$

Для обчислення внутрішніх інтегралів використовуємо метод дискретних особливостей [7].

Числовий аналіз частот та форм вільних гідропружних коливань пластини. Розглянуто коливання квадратної пластини зі стороною a і товщиною h (геометричні параметри і механічні властивості взяті з роботи [9]). Вивчалися коливання в повітрі та з урахуванням приєднаних мас рідини. Визначив розв’язок рівняння (5), обчислюємо частоти Ω коливань пластини в рідині, а за коефіцієнтами c_k знаходимо власні форми коливань.

На рис. 2 зображені форми коливань (10) при $k=1(l=1, m=1)$, $k=4(l=2, m=2)$ та отримані чисельно за допомогою проекційного методу значення $\Gamma_k(x, y)$, які зображені лініями рівня.

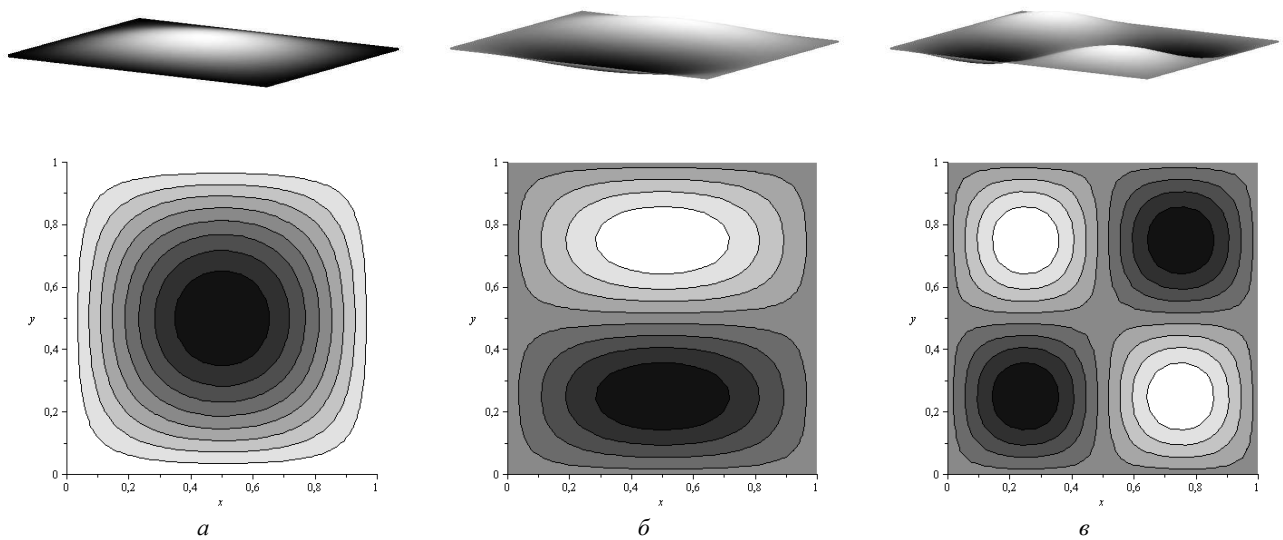


Рис. 2 – Форми коливань та щільності потенціалу: а – при $k = 1 (l = 1, m = 1)$; б – при $k = 4 (l = 2, m = 2)$; в – за допомогою проєкційного методу значення $\Gamma_k(x, y)$.

Бачимо схожий характер поведінки функцій $w_k(x, y)$ та $\Gamma_k(x, y)$. Надалі використовуємо отримані власні форми як базисні функції для розв'язання задач про вимушені коливання тонких пластин з урахуванням приєднаних мас рідини.

У табл. 1 наведені значення частот коливань цієї пластин в повітрі і в воді і проведено порівняння з теоретичними і експериментальними даними з роботи [9].

Таблиця 1 – Безрозмірний частотний параметр для квадратної пластинки

n	в повітрі			з урахуванням приєднаних мас рідини		
	експеримент [9]	теорія [9]	МСЭ [10]	експеримент [9]	теорія [9]	МДО
1	3.43	3.49	3.49	1.475	1.59	1.434
2	8.32	8.55	8.547	4.500	4.70	4.241
3	20.55	21.36	21.33	10.05	10.7	10.00

Безрозмірний частотний параметр обчислюється за формулою:

$$\lambda = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho_1 h}{D}}.$$

Отримані результати свідчать, що метод дискретних особливостей може бути успішно застосований для дослідження вільних гідропружних коливаннях лопатей.

Числовий аналіз вимушених коливань пластини з урахуванням приєднаних мас рідини. Розглянуто квадратну сталеву пластинку з розмірами $a = 0.3$ м, $h = 0.003$ м, та з механічними характеристиками: $E = 2 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\nu = 0.3$, $\rho_1 = 7800$ кг/м³. При цьому отримуємо такі власні значення частот коливань пластинки з урахуванням приєднаних мас рідини:

$$\omega_i = \frac{\lambda_i \sqrt{D}}{2\pi a^2 \sqrt{\rho_1 h}}, \quad i = 1, 2, 3,$$

а саме: $\omega_1 = 12.3$ Гц, $\omega_2 = 36.90$ Гц, $\omega_3 = 86.97$ Гц. Як доведено в [2, 3], за відомими власними частотами та формами коливань можна побудувати систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку для дослідження вимушених коливань. Припустимо, що пластина, що занурена в рідину, знаходиться під дією вертикального гармонічного збудження [1, 3]:

$$Z(t) = b_0 \cos \omega t.$$

Вважаємо, що форми власних коливань пластинки, обчислені з урахуванням приєднаних мас рідини, утворюють базисну систему для дослідження вимушених коливань [1, 10]. В [2, 6] доведено, що вказані власні форми $\{W_k\}_{k=1}^M$ є ортогональними. Тоді, враховуючи розкладення переміщень пластинки за цими базисними функ-

ціями, маємо таке співвідношення:

$$\sum_{k=1}^M [\ddot{d}_k(t) + \omega_k^2 d_k(t)] W_k(x, y) = b_0 \cos \omega t. \quad (12)$$

Після виконання операції скалярного добутку на функції $W_j(x, y)$ співвідношення (11) перетворюється на систему диференціальних рівнянь, розв'язок якої отримано за допомогою методу Рунге – Кутти 4–5 порядку при $b_0 = 0.1$ за такими початковими умовами:

$$d_1(0) = d_2(0) = d_3(0) = 0, \quad \dot{d}_1(0) = \dot{d}_2(0) = \dot{d}_3(0) = 0.02.$$

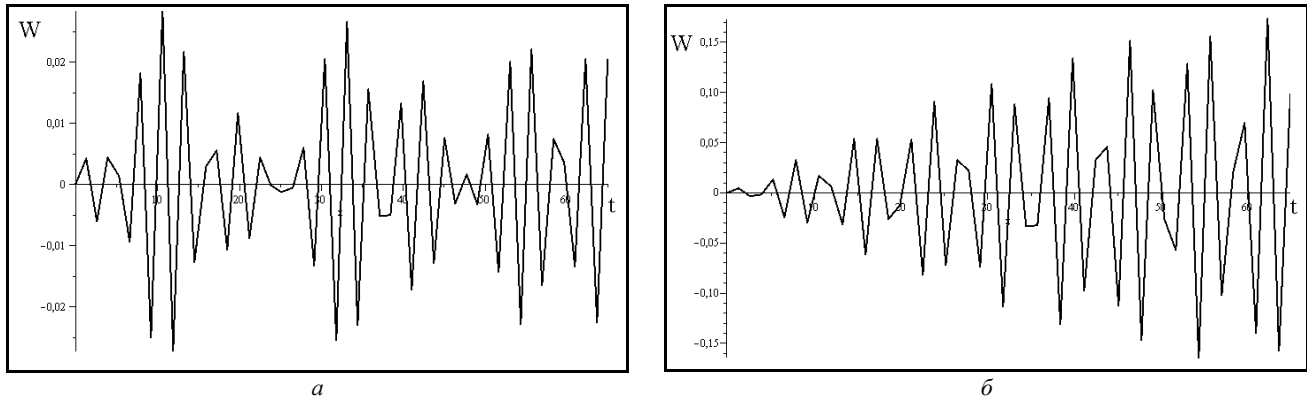


Рис. 3 – Амплітуди коливань пластинки за умови вертикального збудження: а – $\omega = 12$ Гц; б – $\omega = 12.4$ Гц.

На рис. 3, а та рис. 3, б зображені амплітуди коливань пластинки при частотах збудження, рівних $\omega = 12$ Гц та $\omega = 12.4$ Гц відповідно, протягом 65 секунд. Частота $\omega = 12.4$ Гц є близькою до частоти власних коливань $\omega = 12.44$ Гц, при цьому спостерігається зростання амплітуди коливань.

Перспективи подальших досліджень. У подальшому передбачається узагальнити запропонований метод розрахунку власних та вимушених коливань для дослідження частот та форм коливань лопатей робочих коліс поворотно-лопатевого та радіально-осьових гідротурбін з урахуванням приєднаних мас рідини.

Висновки. В роботі запропоновано метод розв'язання задач щодо власних та вимушених коливань тонкостінних елементів конструкцій з урахуванням приєднаних мас рідини. Задачу визначення тиску, що діє на елемент конструкції, зведено до розв'язання гіперсингулярного інтегрального рівняння. Розв'язок цього рівняння здійснено проєкційним методом. Отримано систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів в розкладі невідомої густини потенціалу подвійного шару. Для знаходження елементів матриці проєкційного методу використано метод дискретних особливостей.

Список літератури

1. Medvedovskaya T., Strelnikova E., Medvedyeva K. Free Hydroelastic Vibrations of Hydroturbine Head Covers // Intern. J. Eng. and Advanced Research Technology (IJEART). – 2015. – Vol. 1. – No 1. – P. 45 – 50. – DOI 10.13140/RG.2.1.3527.4961.
2. Strelnikova E., Yeseleva E., Gnitko V., Naumenko V. Free and forced vibrations of the shells of revolution interacting with the liquid // Proc. of XXXII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation. – 2010. – Vol. 50. – P. 203 – 211.
3. Gnitko V., Degtyarev K., Naumenko V., Strelnikova E. Coupled BEM and FEM Analysis of fluid-structure interaction in dual compartment tanks // Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements. – 2018. – Vol. 6(6). – P. 976 – 988.
4. Веремеев І. С., Кантор Б. Я., Науменко В. В. Расчет гидроупругих колебаний рабочих колес радиально-осевых гидротурбин // Вестник НТУ «ХПИ». – 2002. – Т. 12. – № 9. – С. 58 – 68.
5. Avramov K. V., Strelnikova E. A., Pierre C. Resonant many-mode periodic and chaotic self-sustained aeroelastic vibrations of cantilever plates with geometrical nonlinearities in incompressible flow // Nonlinear Dynamics. – 2012. – No. 70. – P. 1335 – 1354.
6. Gnitko V., Marchenko U., Naumenko V., Strelnikova E. Forced vibrations of tanks partially filled with the liquid under seismic load // Proc. of XXXIII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation. – 2011. – Vol. 52. – P. 285 – 296.
7. Гандель Ю. В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. – Харьков : Изд. Харьк. национального ун-та им. В. Н. Каразина, 2000. – 92 с.
8. Стрельникова Е. А. Гиперсингулярные интегральные уравнения в двумерных краевых задачах для уравнения Лапласа и уравнений Ламе // Доп. НАН України. – 2001. – №3. – С. 27 – 31.
9. Muthuveerappan G., Ganesan N., Veluswami M. A. Vibration of square cantilever plate immersed in water // Journal of Sound and Vibration. – 1978. – Vol. 61. – Issue 3. – P. 467 – 470.
10. Ганчин Е. В., Ржевская И. Е., Стрельникова Е. А. Исследование динамических характеристик лопастей рабочих колес поворотно-лопастных гидротурбин при взаимодействии с жидкостью // Вісник Харківського національного університету. – 2009. – № 847. – С. 79 – 86.

References (transliterated)

1. Medvedovskaya T., Strelnikova E., Medvedyeva K. Free Hydroelastic Vibrations of Hydroturbine Head Covers. Intern. J. Eng. and Advanced Research Technology (IJEART). 2015, vol. 1, no. 1, pp. 45–50, DOI 10.13140/RG.2.1.3527.4961.
2. Strelnikova E., Yeseleva E., Gnitko V., Naumenko V. Free and forced vibrations of the shells of revolution interacting with the liquid. Proc. of

- XXXII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation. 2010, vol. 50, pp. 203–211.
3. Gnitsko V., Degtyarev K., Naumenko V., Strelnikova E. Coupled BEM and FEM Analysis of fluid-structure interaction in dual compartment tanks. *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*. 2018, vol. 6(6), pp. 976–988.
 4. Veremeenko I. S., Kantor B. Ya., Naumenko V. V. Raschet gidrouprugikh kolebaniy rabochikh kolies radial'no-osevykh gidroturbin [Computation of hydroelastic vibrations of radial-axial turbine impeller]. *Vestnik NTU "KhPI"* [Bulletin of NTU "KhPI"]. 2002, vol. 12, no. 9, pp. 58–68.
 5. Avramov K. V., Strelnikova E. A., Pierre C. Resonant many-mode periodic and chaotic self-sustained aeroelastic vibrations of cantilever plates with geometrical nonlinearities in incompressible flow. *Nonlinear Dynamics*. 2012, no. 70, pp. 1335–1354.
 6. Gnitsko V., Marchenko U., Naumenko V., Strelnikova E. Forced vibrations of tanks partially filled with the liquid under seismic load. *Proc. of XXXIII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation*. 2011, vol. 52, pp. 285–296.
 7. Gandel' Yu. V. *Vvedenie v metody vychisleniya singulyarnykh i gipersingulyarnykh integralov* [Introduction to the computational methods of singular and hypersingular integrals]. Kharkov, Izd. Hark. natsional'nogo un-ta im. V. N. Karazina, 2000. 92 p.
 8. Strel'nikova E. A. Gipersingulyarnye integral'nye uravneniya v dvumernykh kraevykh zadachakh dlya uravneniya Laplasya i uravneniy Lame [Hypersingular integral equations in the two dimensional boundary value problems for the Laplace and Lamé equations]. *Dop. NAN Ukrainy* [Reports of the National Academy of Science of Ukraine]. 2001, no. 3, pp. 27–31.
 9. Muthuveerappan G., Ganesan N., Veluswami M. A. Vibration of square cantilever plate immersed in water. *Journal of Sound and Vibration*. 1978, vol. 61, issue 3, pp. 467–470.
 10. Ganchin E. V., Rzhetskaya I. E., Strel'nikova E. A. Issledovanie dinamicheskikh kharakteristik lopastey rabochikh koles povorotno-lopastnykh gidroturbin pri vzaimodeystvii s zhidkostyu [Study of dynamical characteristics of Kaplan turbine impeller blades interacting with liquid]. *Visnik Kharkiv's'kogo natsional'nogo universitetu* [Bulletin of the Kharkiv National University]. 2009, no. 847, pp. 79–86.

Надійшла (received) 23.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Москаленко Роман Павлович (Москаленко Роман Павлович, Moskalenko Roman Pavlovich) – аспірант, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, м. Харків; тел.: (050) 598-76-82; e-mail: rimanscamo-mile@gmail.com.

Пальчиков Роман Георгиевич (Пальчиков Роман Георгиевич, Palchikov Roman Georgievich) – аспірант, Інститут проблем машинобудування НАН України ім. А. М. Підгорного, м. Харків; тел.: (050) 519-31-05; e-mail: 19palchikovroman@gmail.com.

Стрельникова Олена Олександрівна (Стрельникова Елена Александровна, Strelnikova Elena Alexandrovna) – доктор технічних наук, професор, провідний науковий співробітник, Інститут проблем машинобудування НАН України ім. А. М. Підгорного, м. Харків; тел.: (050) 519-31-05; e-mail: elena15@gmx.com.

УДК 519.6

А. О. ОСТАПЕНКО, Г. Г. БУЛАНЧУК**МОДЕЛЮВАННЯ ОБТІКАННЯ ПЕРЕШКОД МЕТОДОМ ГРАТКОВИХ РІВНЯНЬ БОЛЬЦМАНА ПРИ ВЕЛИКИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА**

Розглядається застосування кінетичного підходу до моделювання динаміки в'язкої рідини. Запропоновано метод регуляризації для отримання стійких та фізичних розв'язків при великих числах Рейнольдса до 20000. В основі методу регуляризації закладена медіана фільтрація, що ефективно згладжує аномальні пульсації. Верифікація методу проведена на класичній тестовій задачі про обтікання кругового циліндра. Проведені чисельні експерименти із моделювання течії довкола профілю Nasa 0012 під різними кутами атаки.

Ключові слова: в'язка рідина, рівняння Больцмана, регуляризація, круговий циліндр, профіль Nasa 0012.

А. А. ОСТАПЕНКО, Г. Г. БУЛАНЧУК**МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБТЕКАНИЙ ПРЕПЯТСТВИЙ МЕТОДОМ РЕШЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА**

Рассматривается применение кинетического подхода к моделированию динамики вязкой жидкости. Предложен метод регуляризации для получения устойчивых и физических решений при больших числах Рейнольдса до 20000. В основе метода регуляризации заложена медиана фильтрация, которая эффективно сглаживает аномальные пульсации. Верификация метода проведена на классической тестовой задаче об обтекании кругового цилиндра. Проведены численные эксперименты по моделированию течения около профиля Nasa 0012 под разными углами атаки.

Ключевые слова: вязкая жидкость, уравнение Больцмана, регуляризация, круговой цилиндр, профиль Nasa 0012.

А. А. OSTAPENKO, G. G. BULANCHUK**SIMULATION OF THE FLOW OVER OBSTACLES WITH THE LATTICE BOLTZMANN METHOD AT LARGE REYNOLDS NUMBERS**

The application of the kinetic approach for the viscous fluid flow modeling is considered. A regularization method is proposed for obtaining stable and physical numerical solutions at large Reynolds numbers up to 20,000. The basis of the regularization method is the median filtration that effectively smoothes abnormal ripples and, at the same time, preserves the boundaries of sharp transitions and the structure of the flow. The verification of the method was carried out on the classical test task of the flow around circular cylinder at the Reynolds numbers from 500 to 20000. Numerous experiments were conducted to simulate the flow around the profile of Nasa 0012 at different angles of attack. The results of numerical solutions, namely,

© А. О. Остапенко, Г. Г. Буланчук, 2019